Εξέταση Σεπτεμβρίου 2020 - Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε κάθε ερώτηση ένα ακριβώς είναι το σωστό.

Ερώτηση 1. Ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$,

$$S_1 = \{(x,y,z) : x^2 + 2y^6 + 3z^8 = 1\}, \quad S_2 = \{(x,y,z) : (x^2 + y^6 + z^8 - 1)^3 = 0\},$$
$$S_3 = \{(x,y,z) : x^2y^6z^8 = 0\}, \quad S_4 = \{(x,y,z) : x^2y^6z^8 = 1\}$$

δεν είναι κανονική επιφάνεια.

(i) S_1,

(ii) S_2,

(iii) S_3,

(iv) S_4,

(v) άλλο.

Ερώτηση 2. Οι κύριες καμπυλότητες της κανονικής παραμετρικής επιφάνειας

$$X(u,v) = (u+v, uv, u-v), \ (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

στο σημείο $p(0,0,0)$ είναι:

(i) $k_1(p) = k_2(p) = 0$,

(ii) $k_1(p) = k_2(p) = 1$,

(iii) $k_1(p) = \frac{1}{2}, k_2(p) = -\frac{1}{2}$,

(iv) $k_1(p) = -2, k_2(p) = 2$,

(v) άλλο.

Ερώτηση 3. Η απεικόνιση Gauss της κανονικής επιφάνειας $S : y = x^2 + z^2$ είναι:

(i) επίπεδο,

(ii) σφαίρα,

(iii) κύκλος,

(iv) έλλειψη

(v) άλλο.

Ερώτηση 4. Δίνονται κανονικές επιφάνειες S, $\hat{S}$ και $\Phi : S \to \hat{S}$ ισομετρία. Στο σημείο $p \in S$ θεωρούμε ορθομοναδιαία βάση κύριων διευθύνσεων e_1, e_2. Η γωνία των διανυσμάτων $d\Phi_p(w_1), d\Phi_p(w_2)$, όπου

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2)$$

είναι:

(i) $\pi/2$,

(ii) $\pi/3$,

(iii) $\pi/6$,

(iv) $\pi/4$,

(v) άλλο.

Ερώτηση 5. Έστω μία επιφάνεια S η οποία είναι τοπικά ισομετρική με σφαίρα ακτίνας R. Σε σημείο της p, η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτομενική διεύθυνση που διχοτομεί την γωνία των κύριων διευθύνσεων είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{R}$. Οι κύριες καμπυλότητες στο p είναι:

(i) $k_1(p) = \frac{1-\sqrt{2}}{R}, k_2(p) = \frac{1+\sqrt{2}}{R}$,

(ii) $k_2(p) = \frac{1-\sqrt{2}}{R}, k_1(p) = \frac{1+\sqrt{2}}{R}$

(iii) $k_2(p) = \frac{-1+\sqrt{2}}{R}, k_1(p) = \frac{1+\sqrt{2}}{R}$

(iv) $k_2(p) = \frac{2}{R}, k_1(p) = -\frac{2}{R}$

Ερώτηση 6. Σφαιρική καμπύλη $c(s)$ με παράμετρο το μήκος τόξου έχει σταθερή στρέψη $\tau \neq 0$. Η καμπυλότητα της, για κατάλληλες σταθερές a, b είναι της μορφής:

(i) $k(s) = \frac{1}{a\cos\tau s + b\sin\tau s}$,

(ii) $k(s) = \frac{1}{a\cos(\tau s + b)}$,

(iii) $k(s) = \frac{1}{b\sin\tau s}$,

(iv) $k(s) = \frac{1}{a\cos s + b\sin s}$,

(v) άλλο.

Ερώτηση 7. Δίνεται κανονική επιφάνεια με εξίσωση $S : y\sin x = z\cos x$. Η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = (t, t\cos t, t\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι:

(i) επίπεδη,

(ii) κύκλος,

(iii) γραμμή καμπυλότητας,

(iv) ασυμπτωτική καμπύλη,

(v) άλλο.

Ερώτηση 8. Το κύριο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(s)$ μιας καμπύλης c του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και παντού θετική καμπυλότητα πληροί για κάθε $s \in I$ την ισότητα

$$\dot{\vec{n}}(s) = -4\int_{s_0}^{s} \vec{n}(u)du, \;\; s_0 \in I.$$

Ποιο από τα ακόλουθα μπορεί να ισχύει;

(i) Η c είναι κύκλος ακτίνας $r = 1$,

(ii) Η c είναι κυλινδρική έλικα με καμπυλότητα $k = 2$ και στρέψη $\tau = \pm 2$,

(iii) Η c είναι κυλινδρική έλικα με καμπυλότητα $k = -2$ και στρέψη $\tau = 2$,

(iv) Η c είναι κύκλος ακτίνας $r = 1/4$,

(v) Άλλο.

Ερώτηση 9. Δίνονται οι κανονικές επιφάνειες $S_1 : x = zy$, $S_2 : y = z^4 + x^4$, S_3 : αναπτυκτή και S_4 : κύλινδρος. Ποιά από τα ζεύγη επιφανειών που ακολουθούν δεν είναι ισομετρικές;

(i) Μόνο οι S_1 και S_2,

(ii) Μόνο οι S_1 και S_3,

(iii) Μόνο οι S_2 και S_3,

(iv) Μόνο οι S_2 και S_4,

(v) άλλο.

Ερώτηση 10. Έστω μία καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο s και τέτοια ώστε να έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\vec{n}(s) = \left(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\right).$$

Η καμπυλότητα $k(s)$ της c είναι:

(i) $k(s) = 1/r$,

(ii) $k(s) = s/r$,

(iii) $k(s) = -1/r$,

(iv) $k(s) = -s/r$,

(v) άλλο.

Ερώτηση 11. Η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτομενική διεύθυνση της επιφανειακής καμπύλης

$$c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t),\ t \in \mathbb{R}$$

της επιφάνειας $S : x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0$ ισούται με:

(i) $e^t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

(ii) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

(iii) $-e^t$,

(iv) $-\frac{1}{3\sqrt{2}e^t}$,

(v) άλλο.

Ερώτηση 12. Έστω μία καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^3$, με φυσική παράμετρο $s \in I$ καμπυλότητα $k(s) > 0$, για κάθε $s \in I$ και δεύτερο κάθετο διάνυσμα $\vec{b}(s)$. Αν η κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$X(s,v) = c(s) + v\vec{n}(s),\ (s,v) \in I \times (-\varepsilon, \varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

είναι τοπικά ισομετρική με αναπτυκτή επιφάνεια, τότε η c είναι:

(i) επίπεδη,

(ii) καμπύλη σταθεράς κλίσης,

(iii) κυλινδρική έλικα,

(iv) σφαιρική,

(v) άλλο.